

## XXIV. Bolyai János Emlékverseny

-2016.11.26-

### VIII. osztály

1. Az  $x$  és  $y$  pozitív valós számokra  $x + y = 1$ . Igazold, hogy:
  - a)  $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$ ;
  - b)  $xy \leq \frac{1}{4}$ ;
  - c)  $x^4 + y^4 \geq \frac{1}{8}$ .
2. Az  $a$  és  $b$  természetes számok esetén tudjuk, hogy  $(3a + 4b) \vdots 11$ . Igazold, hogy:
  - a)  $(9a^2 - 16b^2) \vdots 11$ ;
  - b)  $(4a^2 - b^2) \vdots 11$ .
3. Az  $ABC$  háromszög  $(AC)$  oldalának tetszőleges  $P$  pontjából meghúzzuk a  $PE \parallel BC$  és  $PF \parallel AB$  egyeneseket, ahol  $E \in AB$  és  $F \in BC$ . Legyen  $T$  az  $[AE]$ ,  $S$  pedig az  $[FC]$  felezőpontja.
  - a) Igazold, hogy  $T_{EFSPT} = \frac{1}{2} \cdot T_{ABC}$ .
  - b) Határozd meg a  $P$  pont helyzetét úgy, hogy az  $AEP$  háromszög területe 9-szerese legyen a  $PFC$  háromszög területének!
4. Az  $ABCD A'B'C'D'$  kockában az  $E, F, G, H, I$  és  $J$  az  $AB, BB', B'C', C'D', D'D$  és  $DA$  élek felezőpontjai. Igazold, hogy:
  - a) az  $E, F, G, H, I$  és  $J$  pontok egy síkba esnek;
  - b)  $A'C \perp (EFGHIJ)$ ;
  - c)  $EFGHIJ$  szabályos hatszög.

Munkaidő: 2 óra.

Sok sikert!

Simon József