

– 2011.12.10 –

VIII. osztály

1. Adottak az $a = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{2^{2011}}$ és
 $b = -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} - \sqrt{2^4} + \dots + \sqrt{2^{2011}}$ számok.
Igazold, hogy $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \in \mathbb{N}$!

2. a) Számítsd ki a következő szorzat értékét:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2011^2}\right).$$

- b) Határozd meg azt a négyjegyű négyzetszámot, amelynek minden számjegyét 1-gyel növelve, ugyancsak négyzetszámot kapsz!

3. Az $ABCD A'B'C'D'$ kockában M , N és P a $[BD]$, $[B'C]$ és $[A'C]$ felezőpontjai.

Bizonyítsd be, hogy

- a) $MN \parallel (ABB')$;
b) $(MNP) \parallel (DCC')$;
c) $MN \perp NP$!

4. Az $ABCD$ egyenlő szárú trapézban $AB \parallel CD$, $AD = DC = BC$ és $m(\hat{A}) = 60^\circ$. A trapéz A csúcsában emelj merőlegest a trapéz síkjára, ezen vedd fel az S pontot! Legyenek G_1 és G_2 az SAB és ADB háromszögek súlypontjai.

Bizonyítsd be, hogy:

- a) $G_1G_2 \parallel (SAD)$;
b) $BD \perp G_1G_2$!