

– 2010.12.11 –

VIII. osztály

1. Oldd meg a következő egyenleteket, ahol $x \in \mathbb{N}$:

a) $\sqrt{1} + \sqrt{1+3} + \sqrt{1+3+5} + \dots + \sqrt{1+3+5+\dots+(2x+1)} = 201 \cdot 10\,055$;

b) $\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+x} = \frac{2010}{2011}$.

2. a) Hozd egyszerűbb alakra:

$$\left[(7+4\sqrt{3})^{2011} + \frac{1}{(7-4\sqrt{3})^{2010}} \right] \cdot \frac{(14-8\sqrt{3})^{2010}}{2^{2010}} + 4\sqrt{3};$$

b) Ha n és a természetes számok, igazold, hogy $\sqrt{n^4 + a(a+n)(a+2n)(a+3n)}$ szintén természetes szám!

3. Az $ABCDEFGH$ kockában $AC \cap BD = \{K\}$, $AG \cap EC = \{J\}$, $I \in (BC)$ úgy, hogy $[BI] \equiv [IC]$.

a) Számítsd ki az $(\widehat{IJ, AH})$ mértékét és az (\widehat{EKG}) szinuszt!

b) Igazold, hogy $IJ \parallel (AHC)$ és $EK \cdot AC = AG \cdot AE$!

4. Az $ABCD$ tetraéderben E az AB , F az AC , G az AD , H a BC , I a DC és J a BD szakasz felezőpontja, $EH \cap BF = \{K\}$ és $EJ \cap BG = \{L\}$.

a) Ha $EFHB$ és $EGJB$ téglalapok, igazold, hogy $AB \perp DC$!

b) Igazold, hogy $LK \parallel (ADC)$!

c) Ha $LK = 4$ cm, számítsd ki a DC szakasz hosszát!

d) Igazold, hogy FJ , EI és GH összefutó egyenesek!