

– 2007.12.08 –

VIII. osztály

1. a) Igazold, hogy két egymás utáni páratlan egész szám szorzatához 1-et hozzáadva, az eredmény teljes négyzet.
- b) Igazold, hogy 4 egymás utáni egész szám szorzatához 1-et hozzáadva az eredmény teljes négyzet.

2. Tudva, hogy $a, b, c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{2\}$ és $a + b + c = 2$, igazold, hogy:

$$\frac{ab}{2-c} + \frac{bc}{2-a} + \frac{ac}{2-b} \leq 1.$$

3. Határozd meg azokat az a és b racionális számokat, amelyekre fennáll a következő összefüggés:

$$\frac{a}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} + \frac{b}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = 1.$$

4. Adottak az A, B, C és D nem egy síkban fekvő pontok. Legyenek M, N, P , illetve Q az $[AC]$, $[BM]$, $[NC]$ illetve $[BP]$ szakaszok felezőpontjai. Igazold, hogy A, N, Q és D egy síkban vannak és $MP \parallel (AQD)$!

5. Jelöljük T_n -nel az n oldalú konvex sokszög alapú hasáb testátlóinak számát. Határozd meg n értékét úgy, hogy fennálljon a következő egyenlőség:

$$T_n + T_{n+1} = T_{n+2}.$$

6. Egy 5 cm oldalhosszúságú négyzet egyik oldalára az ábrán látható módon olyan derékszögű háromszöget szerkesztünk, amelynek befogói 3 cm és 4 cm hosszúságúak. Legyen $CF \cap AB = \{E\}$. Mekkora az AE szakasz hossza?

