

– 2006.12.09 –

VIII. osztály

1. a) Ha $[a]$ az a valós szám egész részét jelöli, számítsd ki a következő összeget:
 $[-99,1] + [-98,1] + [-97,1] + \dots + [-2,1] + [-1,1] + [-0,1]$.
 - b) Melyek azok az $x \in \mathbb{Z}$ számok, amelyekre $\frac{3x-7}{x+2} \in \mathbb{Z}$?
 - c) Igazold, hogy $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{12-\sqrt{108}} \in \mathbb{Q}$!
2. a) Írd fel kifejtett alakba a $(4k+1)^2$, $(4k+2)^2$ és $(4k+3)^2$ hatványokat!
 - b) Igazold, hogy egy teljes négyzet 4-gyel való osztási maradéka nem lehet sem 2, sem 3.
 - c) Igazold, hogy bármely n természetes szám esetén a $\sqrt{n \cdot (n+1)(n+2)(n+3)+2}$ irracionális szám!
3. Az $ABCD A'B'C'D'$ kockában M az AB , N pedig a BC él felezőpontja. Legyen $AN \cap DM = \{P\}$.
 - a) Igazold, hogy $D'A \perp AB$!
 - b) Bizonyítsd be, hogy $D'P \perp AN$!
 - c) Ha $AB = 10$ cm, számítsd ki a $D'P$ szakasz hosszát!
4. Legyen M egy olyan pont, amely nincs az $ABCD$ paralelogramma síkjában. Tudjuk, hogy E, F, K és L rendre az AM, BM, CM és DM szakaszok felezőpontjai. Igazold, hogy:
 - a) $EFKL$ paralelogramma;
 - b) az AK, BL, CE és DF egyenesek egy pontban futnak össze;
 - c) az EF és AB szakaszok felezőpontjai és az M pont kollineárisak!