

– 2005.12.17 –

VIII. osztály

1. Legyen  $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ , ahol  $a, b$  és  $c$  számjegyek.
  - a) Melyik két egymás utáni páratlan természetes szám szorzata lehet az  $S$  összeg?
  - b) Határozd meg az összes olyan a) pontbéli tulajdonsággal rendelkező  $\overline{abc}$  számokat, amelyekre  $a < b < c$ !
2. Igazold, hogy:
  - a)  $\sqrt{6 + \sqrt{7 + \sqrt{3}}} < 3$  ;
  - b)  $\left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} - \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right) = 24\sqrt{2}$ .
3. Határozd meg az összes olyan  $\overline{ab}$  alakú kétjegyű természetes számokat, amelyekre  $m_a - m_h = \frac{3}{2}$ , ahol  $m_a$  és  $m_h$  az  $a$  és  $b$  számok számtani és harmonikus közepei.
4. Hogyan lehet elhelyezni
  - a) 6 pontot egy síkban úgy, hogy ezek közül bármelyik hármat választva, azok egyenlő szárú háromszöget alkossanak;
  - b) 5 pontot a térben úgy, hogy a pontok ne legyenek mind egy síkban, és közülük bármelyik hármat választva, azok egyenlő szárú háromszöget alkossanak? (2 megoldás)
5. Adott az  $ABC$  háromszög. Legyen  $D$  az  $A$  pontnak  $B$ -re vonatkozó szimmetrikusa,  $E$  a  $B$  pontnak  $C$ -re vonatkozó szimmetrikusa,  $F$  pedig a  $C$  pontnak  $A$ -ra vonatkozó szimmetrikusa. Legyen  $DC \cap AE = \{P\}$ ,  $EA \cap BF = \{M\}$  és  $FB \cap CD = \{N\}$ . Igazold, hogy  $T_{MNP} = 3 \cdot T_{ABC}$ !
6. Adott az  $ABCD A'B'C'D'$  kocka, amelynek éle  $AB = a$ . Legyen  $M$  a  $B'$  pontnak  $A$ -ra vonatkozó szimmetrikusa,  $N$  az  $A'$  pontnak  $B$ -re vonatkozó szimmetrikusa,  $P$  a  $D$  pontnak  $C'$ -re vonatkozó szimmetrikusa,  $Q$  pedig a  $C$  pontnak  $D'$ -re vonatkozó szimmetrikusa.
  - a) Határozd meg az  $A'B'$  egyenes és az  $MNPQ$  sík kölcsönös helyzetét!
  - b) Igazold, hogy az  $MNPQ$  négyszög téglalap!
  - c) Számítsd ki az  $MNPQ$  téglalap területét!