

## XII. Bolyai János Emlékverseny

– 2004.12.04 –

### VIII. osztály

1. Adott a következő számsorozat: 1, 3, 7, 13, 21, 31... Határozd meg:
- a sorozat 10. elemét;
  - a sorozat 100. elemét!

2. Igazold, hogy:

$$\sqrt{\sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{14 + \sqrt{3}}}}} < 6.$$

3. Oldd meg az egész számok halmazán:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 7 - y^2.$$

4. Határozd meg a  $\sqrt{3x^2 + 12x + 14}$  kifejezés minimumát, ha  $x \in \mathbb{R}$ !

5. Az  $ABCD A'B'C'D'$  kockában vedd fel a  $P \in BB'$  pontot úgy, hogy  $BB' = B'P = a$ . Legyen  $AC \cap BD = \{O\}$ ,  $PA \cap A'B' = \{E\}$  és  $PC \cap B'C' = \{F\}$ .

Igazold, hogy:

- $EF \parallel (D'AC)$ ;
  - $PD' \perp (D'AC)$ ;
  - $PD' \perp EF$ !
6. Adott az  $ABCD A'B'C'D'$  kocka. Az  $(AA')$ ,  $(D'C')$  és  $(CB)$  félegyeneseken vedd fel az  $M$ ,  $N$  és  $P$  pontokat úgy, hogy  $[A'M] \equiv [AA']$ ,  $[C'N] \equiv [D'C']$  és  $CB = PB = a$ .  
Igazold, hogy:
- az  $MNP_{\Delta}$  egyenlő oldalú;
  - $B' \in (MNP)$ ;
  - a  $B'$  pont az  $MNP_{\Delta}$  súlypontja!