PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XI. Bolyai János Emlékverseny

– 2003.12.06 –

VIII. osztály

1. Igazold, hogy a $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot ...\cdot 21+3}$ szám irracionális!

2. Határozd meg az n egész számot úgy, hogy az $a=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}+\frac{\left(n\cdot\sqrt{3}-1\right)^{2}}{4}$ szám racionális legyen!

3. Adottak az $A=\left(-\infty,\sqrt{ab}\right)$ és $B=\left[\frac{2ab}{a+b},\frac{a+b}{2}\right]$ halmazok, ahol $a,b\in\mathbb{R}^{*}$. Írd fel az $A\bigcup B$, $A\bigcap B$ és $A\setminus B$ halmazokat!

4. Egy 80 tagú számsorozatról tudjuk, hogy bármely közbelső tagja egyenlő szomszédjainak szorzatával. Továbbá az első 40 tag szorzata is 8, valamint összes tagjának szorzata is 8. Határozd meg a sorozat első és második elemét!

5. Egy téglalap átlójának felezőmerőlegese a hosszabb oldalt $1:2$ arányban osztja. Mekkora a két átló által bezárt szög?

6. Adott az $ABCDA'B'C'D'$ kocka. Az AC és BD átlók O metszéspontjából OT merőlegest húzunk az AC' egyenesre $\left(T\in AC'\right)$. Igazold, hogy:

   a) $DB\perp\left(ACC'\right)$;

   b) $AC'\perp DT$ és $AC'\perp BT$;

   c) $TO\perp DB$!

7. Az $ABCD$ tetraéderben AM, AN, DP és DQ a BAD, CAD, ADB, illetve ADC szögek szögfelezői, ($M\in BD$, $N\in DC$, $P\in AB$ és $Q\in AC$). Ha $MN\parallel PQ$ igazold, hogy $[AB]\equiv[AC]$ és $[BD]\equiv[DC]$!

Molnár Klára