

X. Bolyai János Emlékverseny

– 2002.12.07 –

VIII. osztály

1. a) Írj fel $\frac{12}{7}$ és $\frac{13}{7}$ között található 5 racionális számot!
- b) Sorolj fel 3 irracionális számot a 7 és 8 felhasználásával!
- c) Ha $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < 8\}$ és $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| \geq 3\}$, határozd meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ és $A \setminus \mathbb{N}$ halmazokat!

2. a) Az x mely egész értékeire lesz $\sqrt{x^2 + 7x + 60} \in \mathbb{N}$?
- b) Igazold, hogy bármely a, b, c számjegy esetén az $\overline{ab} \cdot \overline{ac} + b^2 + c^2 + bc + 10a \cdot (b+c)$ összeg teljes négyzet!
- c) Melyek azok az $x \in \mathbb{Z}$ számok, amelyekre $\frac{3x+7}{x-2} \in \mathbb{Z}$?

3. Igazold, hogy:
 - a) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1023}+\sqrt{1024}} \in \mathbb{N}$;
 - b) $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}_+$;
 - c) $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{2n+1}{\sqrt{n \cdot (n+1)}} \geq 2n$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$!

4. Az $ABCD$ konvex négyszögben $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ és $DA = d$. M az AD , N a BC felezőpontja és $MN = \frac{AB+CD}{2}$.
 - a) Igazold, hogy $ABCD$ trapéz!
 - b) Igazold, hogy a trapéz szögfelezőinek metszéspontjai egy olyan négyszöget alkotnak, amelynek egyik átlója párhuzamos a trapéz alapjaival! Fejezd ki ennek az átlónak a hosszát az a, b, c és d függvényében!

5. Az $ABCD$ tetraédert az ABC lappal párhuzamos két sík az $A'B'C'$ és $A''B''C''$ háromszögekben metszi. Igazold, hogy:
 - a) $A'B'C'\Delta \sim A''B''C''\Delta \sim ABC\Delta$;
 - b) a metszetháromszögek és az ABC súlypontjai kollineárisak;
 - c) ha a tetraéder szabályos, akkor $AB \perp CD$!