PETŐFI
SÁNDOR
ISKOLA

VII. Bolyai János Emlékverseny

– 1999.12.04 –

VIII. osztály

1. Oldd meg a valós számok halmazán:

   a) $\begin{cases} x+2^n y=4^n \\ 2x-y=2^{2n+1} \end{cases}$, ahol $n\in\mathbb{N}$;

   b) $\left|\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right|=5\sqrt{2}$.

2. Az $a,b,c\in R$ számokra $a+2b+3c=7m$, ahol $m\neq 0$. Igazold, hogy $(a-m)^2+(b-2m)^2+(c-3m)^2=a^2+b^2+c^2$.

3. Legyen $a\in R^*$, $x\in R^*$ úgy, hogy $a=\dfrac{x}{x^2+x+1}$. Számítsd ki a függvényében az $x+\dfrac{1}{x}$, $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ és $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ értékét!

4. Legyen $S=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, ahol $n\in\mathbb{N}^*$. Határozd meg az n értékét, ha $S=10$.

5. Az $ABCD$ téglalap BC oldalán felvesszük az M pontot. Legyen $AM\cap BD=\{N\}$. Igazold, hogy $T_{ANB}=T_{DMN}$.

6. Legyen ABC egy egyenlő szárú derékszögű háromszög, $[AB]\equiv[AC]$, $AB=6$cm. A C pontban merőlegest emelünk a háromszög síkjára, amelyen felvesszük az $SC=6$ cm szakaszt.

   a) Ha D a $[BC]$ felezőpontja, számítsd ki az S pontnak az AB oldaltól és az AD egyenestől való távolságát!

   b) Ha $CP\perp SB$ és Q az $[SA]$ felezőpontja, igazold, hogy $CQ\perp(SAB)$ és $QP\perp SB$!

Molnár Klára