

## V. Bolyai János Emlékverseny

– 1997.12.06 –

### VIII. osztály

1. Adottak az  $a = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$  és  $b = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$  valós számok. Számítsd ki az  $a+b$ ,  $a \cdot b$  és  $a : b$  értékét!
2. Határozd meg azokat az  $a$  és  $b$  egymás utáni számjegyeket, amelyekre fennáll az  $\overline{1ab} = a + a^2 + b^3$  egyenlőség!
3. Egy tanuló az első napon elköltötte a pénzének az  $\frac{1}{3}$ -át, a második napon pedig 1500 lejt. Így megmaradt az eredeti összeg 25 % -a. Határozd meg az eredeti pénzösszeget!
4. Adottak az  $x, y, z, u, v$  és  $w$  zérótól különböző valós számok úgy, hogy:  $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1$  és  $\frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = 0$ .  
Igazold, hogy  $\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} + \frac{z^2}{w^2} = 1$ .
5. Az  $ABC$  háromszög  $C$  szöge derékszög, az  $A$  szöge pedig  $30^\circ$ -os. A  $B$  csúcsból kiinduló szögfelező az  $AC$  befogót a  $P$  pontban, a háromszög köré írt kört pedig a  $Q$  pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy  $BP = 2PQ$ !
6. Az  $ABCD$  téglalap oldalainak hossza  $AB = a\sqrt{2}$  és  $AD = a$ . Az  $A$  pontban merőlegest emelünk a téglalap síkjára, amelyen felvesszük az  $MA = 2a$  szakaszt. Tudjuk, hogy  $N$  a  $BC$  oldal felezőpontja.
  - a) Határozd meg az  $M$  pontnak a  $BC$  oldaltól való távolságát!
  - b) Mekkora távolságra van az  $M$  pont a  $DN$  egyenestől?
  - c) Ha  $AH \perp BM$ , igazold, hogy  $AH \perp (MBC)$ !