

IV. Bolyai János Emlékverseny

– 1996.11.30 –

VIII. osztály

1. Három szám összege 100. Határozd meg a számokat, ha tudod, hogy az első szám 3-szor nagyobb a második és harmadik szám összegénél, a harmadik és második szám különbsége pedig fele a második számnak!

2. Számítsd ki az a és b számok számtani és mértani közepét, ha

$$a = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{2} \quad \text{és} \quad b = (1 + \sqrt{3} - \sqrt{2})(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}) - 2\sqrt{3}.$$

3. Oldd meg a következő egyenletrendszert, ahol $x, y \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{cases} 2y - x = 10 \\ (x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 4 \end{cases}$$

4. Az ABC_{Δ} -ben M , N és P a $[BC]$, $[AC]$ és $[AB]$ oldalak felezőpontjai, G pedig a háromszög súlypontja. Legyen $AM \cap PN = \{E\}$. Számítsd ki a következő arányok értékét:

a) $\frac{EG}{AM}$;

b) $\frac{T_{PNG}}{T_{ABC}}$.

5. Az $ABCD$ derékszögű trapézban a nagyalap $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm és $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$. Az A pontban merőlegest emelünk a trapéz síkjára, amelyen felvesszük az $AE = 4$ cm szakaszt. Számítsd ki:

- a) az E pontnak a DC és BC oldalaktól való távolságát;
 b) az EBC és EDC háromszögek területét;
 c) az EC és AB szakaszok felezőpontjai közötti távolságot!