

XIX. Bolyai János Emlékverseny

– 2011.12.10 –

VII. osztály

1. Hány 9-cel osztható, de 9-nek más többszörösével nem osztható természetes szám képezhető az $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$... $\boxed{9}$ számkártyákból? (összesen 9 darab számkártya van, nem kötelező minden számkártyát felhasználni) Sorold fel a kapott számokat!

2. Oldd meg a racionális számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{x-1}{1} + \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} + \dots + \frac{x-\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}} = 10\,000.$$

3. Az $ABCD$ trapézban $DC \parallel AB$, $AB = 12$ cm, $AD = 4$ cm, $m(\widehat{DAB}) = 60^\circ$ és $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$.

a) Számítsd ki a $[DC]$ kislap hosszát!

b) Igazold, hogy $T_{ABC} = 3 \cdot T_{ACD}$!

4. Az $ABCD$ négyzetben E az AB , F a BC , G a CD és H a DA oldal felezőpontja. Legyen $BH \cap CE = \{M\}$, $DF \cap CE = \{N\}$, $AG \cap DF = \{P\}$ és $AG \cap BH = \{Q\}$. Bizonyítsd be, hogy

a) az $MNPQ$ négyszög négyzet;

b) $T_{ABCD} = 5 \cdot T_{MNPQ}$;

c) $T_{MNPQ} = T_{BME} + T_{CNF} + T_{DPG} + T_{AQH}$!